

1. Jelenérték (PV, NPV), jövő érték (FV)

Számítsa ki az alábbi pénzáramok jelen és jövőértékét. Az A,B,C ajánlatok három külön esetet jelentenek. 10% kamatlábat használjon minden lejáratra. Jövőértéket a 3. év végére kell megállapítani.

Ajánlat/Évenkénti fizetés	Azonnali fizetés	Fizetés egy év múlva	Fizetés két év múlva	Fizetés 3 év múlva
A	-22 millió Ft	10 millió Ft	14 millió Ft	8 millió Ft
B	8 millió Ft	0	18 millió Ft	0
C	8 millió Ft	8 millió Ft	8 millió Ft	8 millió Ft

A:

$$NPV = -22 + \frac{10}{(1+0,1)^1} + \frac{14}{(1+0,1)^2} + \frac{8}{(1+0,1)^3} = +4,662$$

$$FV_3 = -22(1+0,1)^3 + 10(1+0,1)^2 + 14(1+0,1)^1 + 8 = 6,218$$

B:

$$PV = 8 + 0 + \frac{18}{(1+0,1)^2} + 0 = 22,868$$

$$FV_3 = 8(1+0,1)^3 + 18(1+0,1)^1 = 30,448$$

C:

$$NPV = 8 + \frac{8}{(1+0,1)^1} + \frac{8}{(1+0,1)^2} + \frac{8}{(1+0,1)^3} = 27,888$$

$$FV_3 = 8(1+0,1)^3 + 8(1+0,1)^2 + 8(1+0,1)^1 + 8 = 37,128$$

2. Évjáradék jövőértéke

Mekkora az évenkénti 6000 euró tőkebefektetés értéke 4 év múlva, ha a befektetés 8% hozamot hoz és a befektetés az év végén történik?

M.2.

a)

$$FV_4 = 6\,000 \cdot FVIFA_{8\%,4\text{év}} = 6000 \cdot \left(\frac{(1+0,08)^4 - 1}{0,08} \right) = 6000 \cdot 4,506 = 27\,036 \text{ euró}$$

Cash flow áram:

a) *kifizetés az év végén*

Év	0	1	2	3	4	
Cash flow		6 000	6 000	6 000	6 000	FV
						6 000
						6 480
						6 996
						7 560
					összesen	27 036

3. Nettó jelenérték (NPV)

Egy vállalkozó 22 millió Ft-os befektetést tervez. A befektetésből befolyó várható készpénzbevétele a következő első év végén 10 millió Ft, a második év végén 14 millió Ft és a harmadik év végén 8 millió Ft. Érdemes-e megvalósítani a befektetést, ha a hasonló befektetés 10% megtérülést biztosít a befektető számára?

M3.

$NPV = +4,662$ millió Ft (lásd 1.feladat), érdemes megvalósítani.

4. Vegyes kamatozás

2012. október 25-én bankba tett 300 ezer Ft-ot. A betétet 2014. december 31-én szünteti meg. Mekkora összeget kap, ha betétkor 12 %-os kamatot számolt a bank, és amelyet 2014. október 25-én 15 %-ra emelt. Az év 365 napos, a kamat tőkésítése december 31-én történik.

M.4.

Október 25 és december 31 között a kamatnapok száma 67.

$$FV = 300 \cdot \left[1 + \left(0,12 \cdot \frac{67}{365} \right) \right] \cdot (1 + 0,12) \cdot \left[1 + \left(0,12 \cdot \frac{298}{365} + 0,15 \cdot \frac{67}{365} \right) \right] = 386,49 \text{ ezer Ft}$$

5. Jövőérték éven belüli kamatjávairás esetén

Tételezzük fel, a betét értéke 20 000 Ft, az éves kamatláb 6%, minden lejáratra. Mekkora a betét értéke 3 év múlva éves, féléves, negyedéves, havi és napi kamatjávairást feltételezve?

M.5.

a) éves kamatjávairás esetén ($m=1$): $FV_3 = 20\,000 (1 + 0,06)^3 = 23\,820 \text{ Ft}$

b) féléves kamatjávairás esetén ($m=2$): $FV_3 = 20\,000 \left(1 + \frac{0,06}{2} \right)^6 = 23\,881,05 \text{ Ft}$

c) negyedéves kamatjávairás esetén ($m=4$): $FV_3 = 20\,000 \left(1 + \frac{0,06}{4} \right)^{12} = 23\,912,36 \text{ Ft}$

d) havi kamatjávairás esetén ($m=12$): $FV_3 = 20\,000 \left(1 + \frac{0,06}{12} \right)^{36} = 23\,933,61 \text{ Ft}$

e) folytonos kamatjávairás esetén ($e^{r \cdot t}$): $FV_3 = 20\,000 \cdot e^{(0,06 \cdot 3)} = 20\,000 \cdot (2,71828)^{0,18} = 23\,944,34 \text{ Ft}$.

6. Effektív, reál kamatláb

Mekkora az éves 6% névleges kamatláb tényleges, effektív értéke éves szinten éves, féléves, negyedéves, havi és folytonos konverziós periódusok (tőkésítési periódusok) feltételezésével? Mekkora az éves 6% nominális kamatláb reálértéke 4,8% inflációs ráta esetén?

M.6.

a) éves kamatjávairás esetén: $r_{eff} = (1 + 0,06) - 1 = 0,06$; $r_{eff} = 6\%$

b) féléves kamatjávairás esetén: $r_{eff} = \left(1 + \frac{0,06}{2} \right)^2 - 1 = 0,0609$; $r_{eff} = 6,09\%$

c) negyedéves kamatjávairás esetén: $r_{eff} = \left(1 + \frac{0,06}{4} \right)^4 - 1 = 0,0614$; $r_{eff} = 6,14\%$

d) havi kamatjávairás esetén: $r_{eff} = \left(1 + \frac{0,06}{12} \right)^{12} - 1 = 0,0617$; $r_{eff} = 6,17\%$

e) folytonos kamatozás esetén: $r_{eff} = e^{0,06} - 1 = 0,0618$; $r_{eff} = 6,18\%$

f) $r_{reál} = \left(\frac{1 + 0,06}{1 + 0,048} \right) - 1 = 0,0115$; $r_{reál} = 1,15\%$

7. Örökjáradék

Mennyit ér az a örökjáradék jellegű kötvény amely évi 40 \$-t fizet az idők végezetéig, a befektetés elvárt hozamráta 8%?

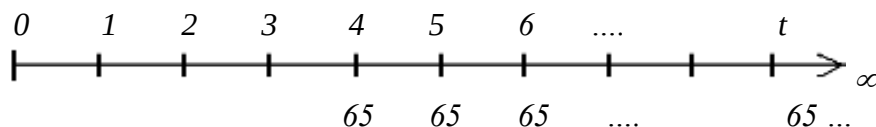
M.7.

$$PV = \frac{40}{0,08} = 500 \text{ \$}$$

8. Később kezdődő örökjáradék jelenértéke

Az ARA Rt. részvényenként 65 euró osztalék fizetését ígéri (a részvény lejárat nélküli értékpapír). A negyedik év végétől fizet osztalékot. Értékeljük az osztalékáramot, ha a befektetők elvárt hozamrátája 9%.

M.8.



$$PV_{\text{perp}} = \frac{65}{0,09} \cdot \frac{1}{(1+0,09)^3} = 557,56 \text{ euró vagy}$$

$$PV_{\text{perp}} = (65/0,09) \cdot PVIF_{9\%,3\text{év}} = 722,22 \cdot 0,772 = 557,55 \text{ euró.}$$

9. Évjáradék jelenértéke (PVAN)

Az MED Kft. két lehetőséget értékel. Egyik választási lehetőség: vásárol most 1,5 millióért egy másológépet. A másik lehetőség: a következő 5 évben minden év végén 350 ezret fizet ugyanazért a másológépért.

- Melyik lehetőséget érdemes kihasználni, ha a vállalat elvárt megtérülése 12%?
- Hogyan módosul az értékelés, ha az év elején kell fizetnie?

M.9.

a) éves fizetések az év végén történnek:

$$PVAN = 350 \cdot PVIFA_{12\%,5\text{év}} = 350 \cdot \left(\frac{1}{0,12} - \frac{1}{0,12(1+0,12)^5} \right) = 350 \cdot 3,605 = 1277,5 \text{ ezer}$$

Érdemesebb a részletfizetést választani.

b) éves fizetések az év elején történnek:

$$PVAN = 350 + 350 \cdot PVIFA_{12\%,4\text{év}} = 350 + 350 \cdot \left(\frac{1}{0,12} - \frac{1}{0,12(1+0,12)^4} \right) = 1412,95 \text{ ezer}$$

Érdemesebb a részletfizetést választani.

10. Évjáradék jelenértéke (PVAN)

D.A. kárpótlási jegyét évjáradékkra váltotta át. A következő 7 évben évi 1,4 millió Ft-ot kap. A kifizetések az év végén esedékesek. Mekkora a kárpótlási jegyek értéke? Az alternatív kamatláb 10%.

M.10.

$$PVAN = 1,4 \cdot PVIFA_{10\%,7\text{év}} = 1,4 \cdot 4,868 = 6,815 \text{ millió Ft}$$

11. Évjáradék (AN)

Egy vállalkozó 2 500 000 Ft hitelt vett fel 4 évre 14%-os kamattal. A kamat és tőketörlesztés az év végén esedékes, összegét számítsa ki az évjáradék képletével.

M.11.

$$PV = AN \times PVIFA_{14\%,4\text{év}} = AN \times 2,918 = 2\,500\,000 \text{ Ft} \rightarrow AN = 856\,751 \text{ Ft}$$

Év	Adósságszolgálat /év	Kamathányad/év	Tőkehányad/év	Fennálló kötelezettség
0				2 500 000
1	856 751	350 000	506 751	1 993 249
2	856 751	279 055	577 696	1 415 553
3	856 751	198 177	658 574	756 979
4	856 751	105 597	751 154	≈ 0

12. Átalány adósságszolgálat (annuitás, AN)

Tételezzük fel, hogy 900 000 Ft áruvásárlási kölcsönt szeretne felvenni. A folyósítás egy összegben történik. A visszafizetési határidő 3 év. A bank által alkalmazott kamatláb 14% amely a hitel futamideje alatt nem változik. A kölcsönszerződés alapján a tartozást (tőke + kamat) évente azonos nagyságrendben kell törleszteni.

a) Számítsa ki az évente fizetendő adósságszolgálat összegét!

M.12.

$$a) \quad 900\,000 = AN \cdot \left(\frac{1}{0,14} - \frac{1}{0,14 \cdot (1+0,14)^3} \right)$$

$$AN = \frac{900\,000}{2,322} = 387\,596,9 \text{ Ft}$$

b) *Törlesztési terv:*

<i>Év</i>	<i>Fennálló tőketartozás időszak végén</i>	<i>Esedékes kamat</i>	<i>Esedékes tőketörlesztés</i>	<i>Esedékes adósságszolgálat</i>
0	900 000			
1	600 000	126 000	300 000	426 000
2	300 000	84 000	300 000	384 000
3	0	42 000	300 000	342 000

13. Átalány adósságszolgálat (annuitás, AN)

Lakásvásárláshoz 15 millió Ft-ot vesz fel bankjától. A visszafizetési idő 5 év. A piaci kamatláb 6%. Mekkora a havi adósságszolgálati kötelezettség összege?

M.13.

$$15\,000\,000 = AN \cdot \left(\frac{1}{0,005} - \frac{1}{0,005 \cdot 1,005^{60}} \right) \rightarrow AN = 289\,992 \text{ Ft}$$

14. Örökjáradék jelenértéke

Egy alapítvány örökjáradék formájában az első évben 500 000 forintot, az első évet követően pedig évi 5%-kal növekvő örökjáradékot kíván juttatni a kedvezményezetteknek. Mekkora összeget helyezne az alapítványba, ha a piaci kamatláb 10%?

M.14.

$$PV_{\text{perp}} = \frac{500\,000}{0,1 - 0,05} = 10\,000\,000 \text{ Ft}$$

15. Évjáradék jelenértéke

Egy biztosító intézet évi 100 000 Ft-ot fizet ügyfelének 5 éven keresztül. A kifizetések az év végén esedékesek. Mekkora a kifizetések jelenértéke, ha az alternatív kamatláb 12%?

M.15.

$$PVAN = 100\,000 \times PVIFA_{12\%, 5\text{év}} = 100\,000 \times 3,605 = 360\,500 \text{ Ft}$$

16. FV egyszerű kamatozással

Mekkora lesz másfél évre lekötött 10Mft értéke a futamidő végén, amennyiben a bank az egyszerű kamatszámítást alkalmazza, a névleges kamatláb pedig 11%?

M16.

$$FV_{1,5} = 10 \times 1,11 \times 1,5 = 16,65 \text{ Mft}$$

17. FV kamatos kamatozással

Amennyiben 5Mft lekötünk három évre, 9%-os névleges kamatlábra, mekkora összeghez jutunk a futamidő végén? Mekkora a jóváírt kamat nagysága?

M17.

$$FV_3 = 5\,000\,000 \times 1,09^3 = 6\,475\,145 \text{ Ft} \rightarrow \text{kamat} = 6\,475\,145 - 5\,000\,000 = 1\,475\,145 \text{ Ft}$$

18. Effektív kamatláb

Melyik befektetési lehetőséget választaná a következő 3 alternatíva közül?

A) Évente 15% kamat B) Félévente 14% kamat C) Negyedévente 12%

Határozza meg az effektív kamatlábat mindhárom konstrukcióra!

M18.

A. $r_{\text{eff}} = r = 15\%$

B. $r_{\text{eff}} = (1 + 0,14/2)^2 - 1 = 1,07^2 - 1 = 1,1449 - 1 = 14,49\%$

C. $r_{\text{eff}} = (1 + 0,12/4)^4 - 1 = 1,03^4 - 1 = 1,1255 - 1 = 12,55\%$

Az elsőt érdemes választani, mert ennek a legmagasabb az éves tényleges hozama.

19. Fixtagú örökjáradék jelenértéke

Egy lejárat nélküli kötvény évi 1MFt-ot fizet. Mekkora ennek a befektetési lehetőségnek a mai értéke, ha a tőkeköltség 14%?

M19.

$$PV_{\text{perp}} = 1\,000\,000 / 0,14 = 7\,142\,857 \text{ Ft}$$

20. Növekvő tagú örökjáradék jelenértéke

Egy életjáradék évi 2 MFt-ot fizet a következő évtől fogva, mely összeg ezután évente 6%-kal emelkedik. Mekkora ennek a befektetési lehetőségnek az értéke, ha a tőkeköltség 12%?

M20.

$$PV_{\text{perp}} = 2\,000\,000 / (0,12 - 0,06) = 2\,000\,000 / 0,06 = 33\,333\,333 \text{ Ft}$$

21. Annuitástényező

Határozza meg a következő annuitástényező értékét:

a, FVIFA (10%, 5 év) b, FVIFA (12%, 12 év)

M21.

$$\text{a, } FVIFA_{10,5} = \frac{(1+r)^t - 1}{r} = \frac{(1+0,1)^5 - 1}{0,1} = 0,61051 / 0,1 = 6,1051$$

$$\text{a, } FVIFA_{12,12} = \frac{(1+r)^t - 1}{r} = \frac{(1+0,12)^{12} - 1}{0,12} = 2,8960 / 0,12 = 32,4665$$

22. Annuitás (AN)

Mekkora lesz az éves átalány adósságszolgálat (tőketörlesztés + kamat), amennyiben 5MFt hitelt veszünk fel 10 évre, évi 12%-os kamatlábra? (átalány = évente azonos adósságszolgálat)

M22.

$$PVIFA_{12,10} = (1,12^{10} - 1) / 0,12 = 2,106$$

$$PV_{AN} = AN \times PVIFA_{r,t} \rightarrow AN = PV_{AN} / PVIFA_{r,t} = 5\,000\,000 / 2,106 = 2\,374\,169 \text{ Ft}$$

23. Effektív kamatláb

A következő 3 betéti konstrukció közül választhatunk:

A, Évente 16% B, Félévente 14% C, Havonta 12%

Határozza meg az effektív kamatlábat mindhárom konstrukcióra! Melyik a legkedvezőbb alternatíva? Amennyiben 3 MFt-ot kötünk le, mekkora lesz a realizált kamat nagysága (Ft) az év végére a legkedvezőbb konstrukció esetén?

M23.

A. $r_{\text{eff}} = r = 16\%$

B. $r_{\text{eff}} = (1 + 0,14/2)^2 - 1 = 1,07^2 - 1 = 1,1449 - 1 = 14,49\%$

C. $r_{\text{eff}} = (1 + 0,12/12)^{12} - 1 = 1,01^{12} - 1 = 1,1268 - 1 = 12,68\%$

←*legkedvezőbb alternatíva*

$$\text{Kamat} = 3\,000\,000 \times 0,16 = 480\,000 \text{ Ft}$$

24. Örökjáradék jelenértéke

Számítsa ki, hogy mekkora összeget kell befizetni ahhoz a jelenben, hogy végtelen hosszú időn át kapjunk 50 ezer forintot 10 százalékos kamatláb mellett!

M24.

$$PV_{\text{perp}} = 50\,000 / 0,1 = 500\,000 \text{ Ft}$$

25. Annuitás (AN)

Egy nyugdíjas a biztosítójával 12 éves járadékszerződést akar kötni. A biztosító ajánlata úgy szól, hogy 12 éven keresztül minden év végén egy meghatározott fix összeget fizet, ha az ügyfél ma befektet 2 MFt-ot. A tőke alternatív költsége 14%. Mekkora összeget fog kézhez kapna az ügyfél minden év végén?

M25.

$$PVAN = AN \cdot PVIFA_{14,12}$$

$$PVIFA_{14,12} = \frac{1}{0,14} - \frac{1}{0,14 \cdot (1 + 0,14)^{12}} = 5,660$$

$$2\,000\,000 = AN \cdot 5,660 \rightarrow AN = 353\,357 \text{ Ft}$$

26. Annuitás jelenértéke (PVAN)

Számítsa ki, hogy mekkora annak az annuitásnak a jelenlegi értéke, amely 7 éven keresztül évi 10 ezer dollárt biztosít 8 százalékos rögzített kamatláb mellett!

M26.

$$PVAN = 10\,000 \cdot PVIFA_{8,7} \qquad PVIFA_{8,7} = \frac{1}{0,08} - \frac{1}{0,08 \cdot (1 + 0,08)^7} = 5,5064$$

$$PVAN = 10\,000 \cdot 5,5064 = 55\,064 \$$$