

VÁLLALATI PÉNZÜGYEK

I. A PÉNZ IDŐÉRTÉKE (12 óra)

Összeállította:

Naár Jánosokl. üzemgazdász, okl. közgazdász-tanár,
mesterpedagógus

1

„A pénz kárba lenyész,
költségelve rész!”

Dugonics András:

Magyar példák beszédek és jeles mondások

1820

2

1. A pénz időértékének jelentősége

Az azonos összegű, de eltérő időpontbeli pénzekről

- ❖ a korábban kapott pénzösszeg befektethető és jövedelmet (kamatot, osztalékot stb. → hozamot) termel, tehát értékesebb, mint a későbbi időpontban megkapott,
- ❖ a már megkapott pénzösszeg biztos, a később kapott pénz bizonytalanabb, a kockázat pedig csökkenti a pénz értékét.

Összegezve:

A ma kapott pénz többet ér, mint a holnap.

A pénz időérték elve: egységnyi mai pénz értékesebb, mint egységnyi jövőbeli pénz.

Az azonos összegű, de eltérő időpontbeli pénzek
különböző pénzek → A PÉNZNEK IDŐÉRTÉKE VAN

3

Hogyan fejezhető ki a pénz időértéke? A pénz időértékének mértékét kamattal vagy kamatlábbal fejezzük ki.

Példa: 100 000 forintot kamatozó betétbe helyezünk. A bank 10% kamatot fizet. Ekkor a pénzünk 1 év múlva 110 000 forintot ér (100 000 + annak 10%-a).

Az infláció és pénz időértéke: minél magasabb a várt infláció → annál kevésbé értékes a jövőbeni pénz a maihoz képest (ti. magasabb kamattal kell jutalmazni a várakozást).



Az infláció csökkenti a pénz vásárlóerejét

4

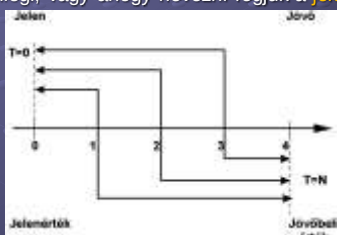
A pénz időértékének számítása

Eljárás, amelynek során meghatározzuk

□ egy adott időpontbeli pénzösszegnek

□ „r” kamatláb ismeretében egy másik időpontra számított értékét, azaz

- a jövőbeli értékét vagy
- a jelenlegi, vagy ahogy nevezni fogjuk a jelenértékét.



5

Az időérték számítás alapfogalmai

Kamat: az a pénzmennyiség, amellyel a tőke egy adott kamatozási időtartam alatt növekszik.

Kamatláb (r): az időegység (pl. év, hónap stb.) alatti kamatoknak és az induló tőkeértéknek a hányadosa, a tőkenövekmény százalékban kifejezve.

Kamatozási periódus: a kamat-jóváírási vagy kamatfizetési időszak hosszát jelöli (pl. év, hónap stb.).

Kamatozási időtartam: a teljes időszak, amelyre a kamat jár/ fizetendő (pl. egy 5 éves futamidejű kötvény esetében 5 év)

Kamattényező: jövőbeli pénz / jelenbeli pénz. Azt fejezi ki, hogy a kamatozási időtartam alatt a jelenbeli pénz hányszorosára növekszik.

6

2. Jövőérték. Kamatlábak összefüggései.

A pénz jövőértéke (Future Value – FV):

megmutatja, hogy

- adott **pénzösszeg** (C_0)
 - meghatározott **idő** (t) eltelte után,
 - adott **kamatláb** (r) mellett
- mennyit fog érni.



Meghatározása a kamatszámítás módszerén alapul:

Jövőbeli pénz = jelenbeli pénz + kamat

7

A jövőérték számításának módszerei

- a) **Egyszerű kamatozás esete:** az időegység (pl. év) alatti tőkenövekmény időben állandó, a kamatokat nem tőkésítjük.
Képlete:

$$FV_t = C_0 + t \times (C_0 \times r)$$

ahol FV_t : a mai pénzösszeg jövőbeni értéke

C_0 : mai (jelenbeli) pénzösszeg

t : periódusok (pl. évek) száma

r : kamatláb (megtérülési vagy hozamráta)

Példa: 100 000 forintot helyezünk el betétként, és 3 évre lekötjük 10 százalékos kamatláb mellett. Mennyi pénzt kapunk három év múlva egyszerű kamatozás esetén?

Megoldás: $FV_3 = 100\,000 + 3 \times (100\,000 \times 0,1) = \mathbf{130\,000\,Ft}$

8

- b) **Kamatos kamatozás esete:** a kamatok periódusonként tőkésítésre kerülnek, azaz minden kamatozási periódus végén az előző tőkéhez csatoljuk a kamatot (a kezdő összeg mellett a kapott kamatok összegét is újra befektetjük, és ez is kamatozik).

Pl. egy három évre (t) lekötött betét (C_0) év végi jövőbeli értékének (FV_3) levezetése:

1. év: $FV_1 = C_0 + C_0 \times r = C_0 \times (1 + r)$

2. év: $FV_2 = C_0 + (C_0 \times r) \times r = C_0 + C_0 \times r^2 = C_0 \times (1 + r)^2$

3. év: $FV_3 = C_0 + (C_0 \times r \times r) \times r = C_0 + C_0 \times r^3 = C_0 \times (1 + r)^3$

Általános képlete:

$$FV_t = C_0 \times (1 + r)^t = PV \times FVIF_{t,r}$$

ahol $C_0 = PV$ (Present Value): jelenérték

$(1 + r)^t = FVIF_{t,r}$ (Future Value Interest Factor):

jövőérték kamattényező

9

Példa: 100 000 forintot teszünk a bankba éves lekötéssel. 3 évig bennhagyjuk 10 százalékos kamatláb mellett. Mennyi pénzt kapunk három év múlva kamatos kamatozás esetén?

Megoldás: $FVIF_{3,10\%} = 1,331$

$FV_3 = 100\,000 \times 1,331 = \mathbf{133\,100\,Ft}$

$FV_3 = 100\,000 \times (1 + 0,1)^3 = \mathbf{133\,100\,Ft}$

Kamatos kamatozás éven belüli tőkésítéssel: a kamatperiódus egy évnél rövidebb (pl.: havi, negyedéves), így a kapott kamatokat éven belül többször újra befektetik

Képlete:

$$FV_{t \times m} = PV \times (1 + r/m)^{t \times m}$$

ahol m = a kamatfizetés évi gyakorisága (pl. havi $\rightarrow m=12$, negyedévi $\rightarrow m=4$)

r = éves kamatláb

10

Példa: 100 000 forintot teszünk a bankba félévenkénti kamatjövőírással. 3 évig bennhagyjuk évi 10%-os kamatláb mellett. Mennyi pénzt kapunk három év múlva kamatos kamatozás esetén?

Megoldás: $FV_{3 \times 2} = 100\,000 \times (1 + 0,1/2)^{3 \times 2} = 100\,000 \times 1,3401 = \mathbf{134\,010\,Ft}$

- c) **Folytonos kamatozás esetén:** a kamatfizetési periódusok hossza lerövidül (pl. nap), a jóváírások naponta követik egymást ($m=365$).

Képlete:

$$FV_t = PV \times e^{r \times t}$$

ahol $e = 2,71828182846$ (a természetes alapú logaritmus alapszáma $\rightarrow$ **Euler-féle szám**)

11

Példa: Betétként elhelyezünk 100 000 forintot napi tőkésítéssel 3 évre lekötve. Mennyi ennek betétnek felnövekedett értéke, ha az éves kamatláb 10%?

Megoldás:

$FV = 100\,000 \times (1 + 0,1/365)^{3 \times 365} = \mathbf{134\,982\,Ft}$

vagy

$FV = 100\,000 \times (2,718)^{0,1 \times 3} = \mathbf{134\,982\,Ft}$

12

Hogyan hasonlítjuk össze kamatlábakat?

A jegyzett (kinyilvánított v. névleges v. nominális) kamatláb nem egyenlő a tényleges (effektív) kamatlábbal.

Megoldás: **kiszámítjuk az effektív kamatlábat.**

Effektív kamatláb (r_{eff}): a különböző időperiódusokra (féléves, negyedéves, havi stb.) vonatkozó névleges kamatlábakból számolt éves kamatláb ← **összehasonlíthatóság biztosítása**

Számítása:

$$r_{\text{eff}} = (1 + r/m)^m - 1$$

Példa: Egy bank évi 16%-os kamatlábbal terhelten nyújt hitelt. A kamatokat negyedévenként kell fizetnie az adósnak. Mekkora az effektív kamatláb?

Megoldás: $r_{\text{eff}} = (1 + 0,16/4)^4 - 1 = 0,1699 \sim \underline{17,0\%}$

13

Az effektív (r_{eff}) és névleges kamatláb (r) viszonya:

- **azonos**, ha a tőkésítésre évente egyszer kerül sor,
- egyébként az **eltérés** a névleges kamatláb nagyságától és a tőkésítés gyakoriságától (m) függ

A jövőérték-számítás szabálya: egy pénzösszeg jövőbeli értéke annál nagyobb,

- minél nagyobb a kamatláb (r)
- minél több kamatperiódus (t) van
- minél gyakoribb a kamat tőkésítése (m)

Mikor melyik kamatozással számoljunk?

- a) **egyszerű kamatozás:** a banki éven belüli, rövid lejáratú betétek és folyószámlák kamatainak megállapításakor
- b) **kamatos kamatozás:** az éven túli, hosszú lejárat befektetések kamatainak megállapításakor

14

A reálkamatláb ($r_{\text{reál}}$):

Az inflációs rátával korrigált kamatláb (nominális vagy effektív).

Számítása:

becsléssel:

$$r_{\text{reál}} = r - I$$

pontosan:

$$r_{\text{reál}} = [(1 + r) / (1 + I)] - 1$$

I = inflációs ráta

Példa: Az éves nominális kamatláb 15%, az inflációs ráta 12%. Mekkora a reálkamatláb? Határozza meg becsléssel és pontos számítással!

Megoldás:

Becsült: $r_{\text{reál}} = 15 - 12 = \underline{3\%}$

Pontos: $r_{\text{reál}} = [(1 + 0,15) / (1 + 0,12)] - 1 = \underline{2,68\%}$

15

3. Jelenérték. Kamatláb-diszkontláb kapcsolata. Gyakorlati alkalmazások.

Jelenérték: jövőbeli pénz (FV_t) nulladik időpontbeli jelenlegi (nulladik időpontbeli) értéke (**Present Value - PV**)

- Egy jövőbeli pénzbevétel jelenértéke **az az összeg**, amelyet most kell befektetnünk adott kamatláb (r) mellett ahhoz, hogy később azzal a bevétellel megegyező pénzünk legyen
- Egy pénzáramlás (**cash flow**) jelenértékét **úgy számítjuk ki**, hogy minden jövőbeni pénzbevétel jelenértékét külön-külön kiszámoljuk, majd a kapott eredményeket összeadjuk

16

Jelenérték meghatározása:

- a **diszkontálás** módszerén alapul
- az időegyenest a jövőbeli időpontoktól bal felé haladunk

Diszkont: az a pénzmennyiség, amivel kevesebbet fizetünk most, mint amit az időszak végén kapunk (levont kamat).

Diszkontálás: a kamatszámítással ellentétes művelet - mivel jövőbeni pénzáramlás kevesebbet ér, mint a mai, ezért a diszkontálás a pénzek „leértékelését” jelenti.

Diszkontláb: a diszkont százalékos aránya a jövőbeli értékhez viszonyítva → **kamat / jövőbeli pénz**

Diszkonttényező: kifejezi, hogy a jelenbeli tőkeérték a jövőbeli tőkeérték hányszorosának felel meg → **jelenbeli pénz / jövőbeli pénz** → a jövőbeli egységnyi pénzösszeg (pl. 1 forint) mai értékét fejezi ki. (a kamattényező reciprokl értéke)

17

Számítása – a jövőérték képletéből levezetve:

$$FV_t = PV \times (1 + r)^t \quad / \div (1 + r)^t$$

$$FV_t / (1 + r)^t = PV$$

$$PV = FV_t / (1 + r)^t$$

$$PV = FV_t \times 1 / (1 + r)^t$$

$$PV = FV_t \times PVIF_{t,r}$$

ahol: $FV_t = C_t$

$PVIF_{t,r}$ = **P**resent **V**alue **I**nterest **F**actor
(diszkonttényező) = $DF_{t,r}$

18

Példa1: Egy befektetésből 4 év múlva 1 millió forintra számítnak, 15% kamatláb mellett. Mennyi ennek a jelenértéke?

Megoldás: $PV = 1\,000\,000 \times 1/1,15^4 = 1\,000\,000 \times 0,571753 = \mathbf{571\,753\,Ft}$

Példa2: A MÁV-START Zrt. egyik partnere csődbe jut, így a MÁV várhatóan csak 1 év múlva jut az 50 millió forint vevőköveteléshez. Mekkora hitelt vehet fel, amit képes ebből a követelésből visszafizetni 1 év múlva, ha banki kamatláb 12%?

Megoldás: $PV = 50\,000\,000 \times 1/(1 + 0,12)^1 = 50\,000\,000 \times 0,892857 = \mathbf{44\,642\,857\,Ft}$

19

Példa3: Mennyi pénzt kell betétbe elhelyezni évi 25% kamatláb mellett, hogy 3 év múlva 1800 forintunk legyen?

Megoldás: $PV = 1800 \times 1 / (1 + 0,25)^3 = \mathbf{921,6\,Ft}$
 $PV = 1800 \times PVIF_{25,3} = 1800 \times 0,512 = \mathbf{921,6\,Ft}$

Példa4: Az Államadósság Kezelő Központ diszkont kincstárjegy (futamidő 1 év) és diszkontkötvényt kibocsátását tervezi. A lejáratkori visszavásárlási ár 10 000 Ft. Az ígért hozam 8%.

a) Mennyi a diszkont kincstárjegy kibocsátási ára?

b) Mennyi az 5 éves futamidejű államkötvény kibocsátási ára?

Megoldás:

a) Diszkont kincstárjegy:

$$10\,000 \times 1 / (1 + 0,08)^1 = \mathbf{9\,259,26\,Ft}$$

$$10\,000 \times PVIF_{8,1} = 10\,000 \times 0,926 = \mathbf{9260\,Ft}$$

b) Államkötvény:

$$10\,000 \times 1 / (1 + 0,08)^5 = \mathbf{6\,805,83\,Ft}$$

$$10\,000 \times PVIF_{8,5} = 10\,000 \times 0,681 = \mathbf{6810\,Ft}$$

20

Egyenletlen, több periódusból származó jövőbeni pénzáramok jelenértéke:

Számítása: $PV = \sum \{C_t / (1+r)^t\} = C_0 + C_1 / (1+r)^1 + C_2 / (1+r)^2 + \dots + C_n / (1+r)^n$

ahol: t = az éppen esedékes időperiódus (0, 1, ..., n)

Példa: Egy vállalkozó kötelezettségét üzleti partnere felé részletekben fogja kifizetni: 1,5 millió Ft-ot a megállapodás időpontjában, majd következő két évben 500 000 Ft-ot évenként. Határozza meg, 15 %-os piaci kamatláb mellett a kifizetés jelenértékét?

Megoldás: $PV = 1,5M + 0,5M/1,15^1 + 0,5M/1,15^2 = 1,5M + 0,435M + 0,378M = \mathbf{2,313M\,Ft}$

21

Nettó jelenérték (NPV): a pénzáramlások jelenértékét úgy vonjuk össze, hogy a bevételeket +, a kiadásokat – előjellel szerepeltetjük.

Számítása: $NPV = \pm C_0 \pm \sum \{C_t / (1+r)^t\} = \pm C_0 \pm C_1 / (1+r)^1 \pm C_2 / (1+r)^2 \pm \dots \pm C_n / (1+r)^n$

Példa: Egy beruházás pénzáramai (kiadások, bevételek) a megvalósítástól számított öt (0., 1., 2., 3. és 4.) évben rendre: –12M, +3M, +4M, +5M, +4M Ft. A kamatláb az időszakban 10%. Számítsa ki a beruházás nettó jelenértékét?

Megoldás:

$$NPV = -12M + 3M/1,1^1 + 4M/1,1^2 + 5M/1,1^3 + 4M/1,1^4 = -12M + 2,727M + 3,306M + 3,757M + 2,732M = \mathbf{0,522M}$$

22

A jövőbeni és a jelenértékből végezhető számítások:

Kamatláb meghatározása: pl. a kamatszervény nélküli (diszkont) kötvény évi hozamának megállapításához, ekkor: $FV = \text{névérték}$, $PV = \text{vételi árfolyamérték}$

$$r = \sqrt[t]{(FV / PV)} - 1$$

Példa: Egy 1 000 000 Ft névértékű két éves lejáratú diszkontkötvényt vettünk 870 000 Ft-ért? Milyen kamatlábnak megfelelő a kötvény hozama?

Megoldás: $r = \sqrt[2]{(1000000 / 870000)} - 1 = \sqrt[2]{1,1494253} - 1 = 0,07211 \sim \mathbf{7,21\%}$

23

Kamatozási periódus meghatározása:

Az előző képlet átrendezésével a kamatozási kifejezhető, azonban a hagyományos algebrai megoldás helyett a logaritmus bevezetése szükséges

$$t = (\log FV - \log PV) / \log(1+r)$$

Példa: Egy 1.000.000 Ft névértékű két éves diszkontkötvényt vettünk 870.000 Ft-ért. Hány évi kamatnak felel meg 5%-os kamatláb?

Megoldás: $t = (\log 1000000 - \log 870000) / \log 1,05 = (6,0000 - 5,9395) / 0,0212 = \mathbf{2,85\,év}$

24

A kamatláb (r) és a diszkontláb (d) kapcsolata:

Különbségek:

- a kamatláb a jelenértékre
- a diszkontláb a jövőbeli pénzre vetíti a kamatot.

Összefüggés:

$$C / (1 + r) = C \times (1 - d) / \div C$$

$$1 / (1 + r) = 1 - d$$

$$d = r / (1 + r)$$

Példa: 10 százalékos kamatláb például $0,1 / 1,1 = 0,0909$, azaz 9,09 százalékos diszkontlábát jelent.

A kamattényező-diszkonttényező kapcsolata:

- diszkonttényező ($PVIF_{t,r}$) < kamattényező ($FVIF_{t,r}$)
- kamattényező $\times$ diszkonttényező = 1 adott r és t esetén

25

4. Speciális pénzáramok értékelése**4.1. Örökjáradék**

Járadék: rendszeres időközönként ismétlődő azonos nagyságú, vagy azonos mértékben változó pénzáramlás sorozat.

Járadéktag: a pénzáramlás sorozat egy eleme

Járadékköz: két járadéktag között eltelt időtartam (időköz)

Örökjáradék (perpetuity): végtelen számú, egyenlő időközönként esedékes, azonos nagyságú pénzáramlások sorozata. (A köznap nyelv az örökjáradékot **életjáradékként** említi.)

26

Örökjáradék jelenértéke (PV_{PERP}): azt fejezi ki, hogy a jövőben esedékes cash-flow mennyi mai pénzzel egyenértékű

□ **Fix összegű járadéktagok** esetén (a járadéktag minden periódusban azonos, azaz $C_1 = C_2 = \dots = C_t \rightarrow$ vagyis C):

$$PV_{PERP} = \frac{C_1}{(1+r)} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \frac{C_3}{(1+r)^3} + \dots + \frac{C_t}{(1+r)^t} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{C}{(1+r)^t} = \frac{C}{r}$$

Példa1: Egy alapítvány kuratóriuma évente odaítélésre kerülő kutatói ösztöndíjat alapított. A díjazottak részére évente összesen 5 000 000 Ft-ot tervez kifizetni. Mekkora összeget kell befektetni ennek megvalósításához, ha a hosszú távon várható kamatláb 5%?

Megoldás: $PV_{PERP} = C/r = 5\,000\,000 / 0,05 = 100\,000\,000\text{ Ft}$

27

Példa2: Mennyit érdemes kifizetnünk ma azért a lehetőségért, hogy minden év végén (életünk végéig, s majd örökseink is) kapunk 100 000 Ft-ot. Az első kifizetés 5 múlva (az 5. év végén) esedékes. Feltételezzük, hogy a piaci hozam minden lejáratra 10%.

Megoldás:

$PV_{PERP(5)} = C / r = 100\,000 / 0,1 = 1\,000\,000\text{ Ft}$ (5. év végén)

Az első járadéktagot nem 1 év, hanem 5 év múlva kapjuk meg, ezért diszkontálnunk kell az 1 000 000 Ft-ot.

$PV_1 = 1\,000\,000 / (1 + 0,1)^4 = 683\,013\text{ Ft}$

28

□ **Növekvő összegű járadéktagok** esetén (a járadéktag minden periódusban azonos mértékben (g) növekszik):

$$PV_{PERP} = \frac{C_1}{(1+r)} + \frac{C_1 \cdot (1+g)}{(1+r)^2} + \frac{C_1 \cdot (1+g)^2}{(1+r)^3} + \dots + \frac{C_1 \cdot (1+g)^{t-1}}{(1+r)^t} = \frac{C_1}{r-g}$$

Példa: Egy mecénás egykori iskolája kórusát szeretné anyagilag támogatni. Az első évben 500 000 Ft-ot, a továbbiakban, pedig évente 3%-kal növekvő összeget kíván erre a célra biztosítani. Mekkora tőkével valósítható meg a terv, ha a piaci kamatláb 5%?

Megoldás: $PV_{PERP} = C_1 / (r-g) = 500\,000 / (0,05 - 0,03) = 500\,000 / 0,02 = 25\,000\,000\text{ Ft}$

Örökjáradék jövőértéke: nem értelmezhető!! (ti. a végtelen számú perióduson keresztül kifizetett pénzáramok kamatos kamat számítás alapján felfüggött értéke **végtelen**.)

29

4.2. Annuitás

Annuitás (annuity): meghatározott időtartam alatt azonos időközönként jelentkező **egyenlő nagyságú** pénzáramok sorozata. (A köznap nyelv az annuitást **évjáradékként** említi.)

Az örökjáradék és az annuitás közötti különbség: az annuitás esetében a pénzáramlás meghatározott ideig esedékes, tehát nem a végtelenségig, mint az örökjáradék esetében.

Az annuitás fajtái a pénzáramok időbelisége szerint:

A pénzáram jelentkezése	Az annuitás fajtája
Periódus végén	Szokásos
Periódus elején	Esedékes
meghatározott periódust követően	Halasztott

30

Az annuitás jelenértéke:

t perióduson át esedékes, periódusonként egyenlő nagyságú pénzáramok (kifizetések, vagy befizetések) sorozatának jelenértéke

a) **Szokásos annuitás jelenértéke:** azonos a 0. időpontra és a t . időpontra meghatározott örökjáradék jelenértékének különbségével. (Jele: **PVAN**, Present Value of ordinary Annuity)

1. örökjáradék	t . örökjáradék
$PV_{PERP} = \frac{C}{r}$	$PV_{PERP(t)} = \frac{C}{r}$
	Diszkontálva a 0. időpontra
	$PV_{(0)} = \frac{C}{r} \cdot \frac{1}{(1+r)^t}$

31

Képlete:

$$PV_{AN} = \frac{C}{r} - \frac{C}{r} \cdot \frac{1}{(1+r)^t} = C \cdot \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r \cdot (1+r)^t} \right]$$

Annuitási diszkonttényező (annuitásfaktor): t

időperióduson (pl. éven) át esedékes 1-1 pénzegység r kamatláb mellett együttes jelenértékét adja. A fizetésekre a periódusok végén kerül sor. (Jele: **PVIFA**, Present Value Interest Factor of ordinary Annuity)

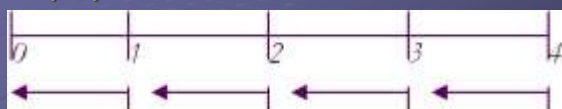
$$PVIFA_{r,t} = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r \cdot (1+r)^t} \right) \quad \text{vagy} \quad PVIFA_{r,t} = \left[\frac{1 - \frac{1}{(1+r)^t}}{r} \right]$$

vagyis

$$PV_{AN} = AN \cdot PVIFA_{r,t}$$

32

Példa1: 1 Ft jövedelmet szeretnék kapni 4 éven keresztül 10%-os kamatláb mellett év végi kifizetést feltételezve. Mennyit kell most elhelyezni ahhoz, hogy 10%-os kamatot feltételezve ez teljesüljön?

**Megoldás:**

$$PVIF_{10,1} = 0,909$$

$$PVIF_{10,2} = 0,826$$

$$PVIF_{10,3} = 0,751$$

$$PVIF_{10,4} = 0,683$$

$$\text{Összesen: } \underline{\underline{3,169 \text{ Ft}}} = PVIFA_{10,4}$$

33

Példa2: Mennyiért érdemes megvásárolni ma azt a befektetést, amely 5 éven keresztül évi 1 000 000 Ft-ot fizet, ha az éves referencia hozam 8%?

Megoldás: $C = AN = 1\,000\,000 \text{ Ft}$ $r = 8\% = 0,08$ $t = 5 \text{ év}$

$$PV_{AN} = C \cdot \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r \cdot (1+r)^t} \right] = 1000000 \cdot \left[\frac{1}{0,08} - \frac{1}{0,08 \cdot (1+0,08)^5} \right]$$

= **3 992 710 Ft** vagy

$$PV_{AN} = AN \times PVIFA_{8,5} = 1\,000\,000 \times 3,993 = \underline{\underline{3\,993\,000 \text{ Ft}}}$$

Példa3: Mekkora évjáradékra számíthatunk 10 éven keresztül, ha 3 millió Ft-ot fizetünk ma és a piaci hozam 8%?

Megoldás: $PV_{AN} = 3\,000\,000 \text{ Ft}$ $r = 8\% = 0,08$ $t = 10 \text{ év}$

$$PVIFA_{8,10} = 6,710 \text{ (táblázatból)}$$

$$PV_{AN} = AN \cdot PVIFA_{8,10} \rightarrow AN = PV_{AN} / PVIFA_{8,10}$$

$$AN = 3\,000\,000 / 6,710 = \underline{\underline{447\,094 \text{ Ft}}}$$

34

b) **Esedékes annuitás jelenértéke:** t perióduson át esedékes, periódusonként egyenlő nagyságú pénzáramok sorozatának jelenértéke. (Jele: **PVAND**, Present Value of Annuity Due)

Számítása: a szokásos annuitásból

$$PV_{AND} = AN \cdot [PVIFA_{(r,t-1)} + 1]$$

Esedékes annuitás diszkontfaktor: t perióduson keresztül esedékes 1 egységnyi járadék jelenértéke. (Jele: **PVIFAD**, Present Value Interest Faktor of Annuity Due)

$$PVIFAD_{r,t} = PVIFA_{(r,t-1)} + 1$$

ennek alapján:

$$PV_{AND} = AN \cdot PVIFAD_{r,t}$$

35

Példa: Mennyit fizetne azért a befektetésért, amely 4 éven keresztül minden év elején 100 000 Ft hozamot biztosít, ha a piaci kamatláb 8%?

Megoldás: $AN = 100\,000 \text{ Ft}$ $r = 0,08$ $t = 4$

$$PVIFAD_{8,4} = PVIFA_{8,4-1} + 1 = PVIFA_{8,3} + 1 = 2,577 + 1 = 3,577$$

$$PV_{AND} = 100\,000 \cdot 3,577 = \underline{\underline{357\,700 \text{ Ft}}}$$

c) **Halasztott annuitás jelenértéke:** : az annuitást az t -edik és az $(t-k)$ -edik évi annuitástényező különbségével szorozzuk, ahol a két annuitási tényező különbsége egy olyan t éves annuitást reprezentál, amelynél az első k évben nincs pénzáram; ($k < t$).

$$PV_{AN} = AN \cdot (PVIFA_{r,t} - PVIFAD_{r,t-k})$$

36

Példa: Mennyit fizetne most egy olyan 10 éves futamidejű kötvényért, amely a 6. évtől kezdődően minden évben az év végén 100 000 Ft hozamot biztosít, ha a piaci kamatláb 8%?

Megoldás: $AN = 100\,000\text{ Ft}$ $r = 0,08$ $t = 10$ $k = 6$
 $PVIFA_{8,10} = 6,710$
 $PVIFA_{8,10-6} = PVIFA_{8,4} = 3,312$
 $PV_{AN} = 100\,000 \cdot (6,710 - 3,312) = \mathbf{339\,800\text{ Ft}}$

37

Az annuitás jövőértéke:

a) **Szokásos annuitás jövőértéke:** a t perióduson át esedékes, periódusonként azonos nagyságú sorozatának jövőértéke a t -edik periódus végén (Jele: **FVAN**, **F**uture **V**alue of ordinary **A**nnuity).

$$FV_{AN} = C \cdot (1+r)^0 + C \cdot (1+r)^1 + \dots + C \cdot (1+r)^{t-1}$$

$$FV_{AN} = C \cdot \left[(1+r)^0 + (1+r)^1 + \dots + (1+r)^{t-1} \right]$$

A szögletes zárójelben egy t elemű mértani sorozat összege található.

$$FV_{AN} = C \cdot \frac{(1+r)^t - 1}{r}$$

38

Szokásos annuitástényező: t perióduson keresztül esedékes 1-1 pénzegység r kamatláb melletti együttes jövőbeni értékét adja. (**FVIFA**, **F**uture **V**alue **I**nterest **F**actor of ordinary **A**nnuity)

$$FVIFA_{r,t} = \frac{(1+r)^t - 1}{r}$$

Behelyettesítve:

$$FV_{AN} = AN \cdot FVIFA_{r,t}$$

Példa: Tétélezzük fel, hogy 4 éven keresztül minden év végén 10 000 Ft-ot beteszünk a bankba. Mekkora összeg lesz a számlánkon, ha a bank évente 5% kamatot ír jóvá?

Megoldás: $AN = 10\,000\text{ Ft}$ $r = 0,05$ $t = 4$
 $FVIFA_{5,4} = 4,310$
 $FV_{AN} = 10\,000 \cdot 4,310 = \mathbf{43\,100\text{ Ft}}$

39

b) **Esedékes annuitás jövőértéke:** a t perióduson át esedékes, periódusonként azonos nagyságú pénzáramok sorozatának jövőértéke a t -edik periódus elején (Jele: **FVAND**, **F**uture **V**alue of **A**nnuity **D**ue).

A szokásos annuitásból számoljuk:

$$FV_{AND} = C \cdot [FVIFA_{(r,t+1)} - 1]$$

Esedékes annuitás jövőérték faktor: t perióduson keresztül esedékes 1 egységnyi járadék jövőértéke. (Jele: **FVIFAD**, **F**uture **V**alue **I**nterest **F**actor of **A**nnuity **D**ue)

$$FVIFAD_{r,t} = FVIFA_{(r,t+1)} - 1$$

Behelyettesítve:

$$FV_{AND} = AN \cdot FVIFAD_{r,t}$$

40

Példa: Minden év elején elhelyezünk a bankban 10 000 Ft-ot 4 éven át. Mennyi pénzünk lesz a 4. év végére, ha a bank 7% kamatot ír jóvá?

Megoldás: $AN = 10\,000\text{ Ft}$ $r = 0,07$ $t = 4$
 $FVIFA_{7,4+1} - 1 = FVIFA_{7,5} - 1 = 5,751 - 1 = 4,751$
 $FV_{AN} = 10\,000 \cdot 4,751 = \mathbf{47\,510\text{ Ft}}$

c) **Halasztott annuitás jövőértéke:** az annuitást a t -edik és a k -adik évi annuitástényező különbségével szorozzuk, ahol a két annuitási tényező különbsége egy olyan t éves annuitást reprezentál, amelynél az első k évben nincs pénzáram; ($k < t$). A szokásos annuitásból számoljuk:

$$FV_{AN} = AN \cdot (FVIFA_{r,t} - FVIFA_{r,k})$$

41

Példa: Három év múlva, majd ezt követően még hét éven keresztül (összesen tehát nyolc alkalommal) minden esztendő végén befizetünk egy betétzámlára 100 000 Ft-ot fix 5%-os kamatra. Mennyi lesz a befizetett összegek felnövekedett értéke a 10. év végén?

Megoldás: $AN = 100\,000\text{ Ft}$ $r = 0,05$ $t = 10$ $k = 2$
 $FVIFA_{5,10} = 12,578$
 $FVIFA_{5,2} = 2,050$
 $FV_{AN} = AN \cdot (FVIFA_{5,10} - FVIFA_{5,2})$
 $= 100\,000 \cdot (12,578 - 2,050) = \mathbf{1\,052\,800\text{ Ft}}$

42

5. Hiteltörlesztési tervek

Törlesztés: az a szerződésbe foglalt megegyezés, amelyet az adósnak a felvett hitel visszafizetése során követnie kell. Az adósságszolgálat teljesítésére fizetett törlesztések $C_1, C_2, C_3, \dots, C_t$ pénzáramlás-sorozatokat alkotnak.

Törlesztő-részlet (C_t): az adós t -edik időpontban esedékes kötelezettsége, mely a t -edik időpontban esedékes kamatfizetés (K_t) és a t -edik időpontban esedékes tőketörlesztés (T_t) összegével egyenlő.

$$C_t = K_t + T_t$$

Törlesztési terv: az adósságszolgálat tervezett C_t összegeit, annak tőketörlesztésre és kamatfizetésre bontott részleteit és azok befizetési időpontjait tartalmazó táblázat.

43

Hitelállomány (H_t): tőketartozás, t -edik évi értéke megegyezik az előző időszakban esedékes tőketartozás és tőketörlesztés különbségével.

$$H_t = H_{t-1} - T_{t-1} \quad \text{ha } t > 1$$

Kamatfizetés: összege megegyezik az esedékes tőketartozás (H_t) és kamatláb (r) szorzatával.

$$K_t = H_t \cdot r$$

Türelmi idő: az az idő, amely alatt még nincs tőketörlesztés, csak kamatfizetés történik.

44

A törlesztések típusai

- Lejáratkor egy összegben törlesztő hitelkonstrukció
- Egyenletes tőketörlesztésű hitelkonstrukció
- Türelmi idő törlesztés
- Azonos részletfizetésű (annuitásos) hitelkonstrukció

45

a) Lejáratkor egy összegben törlesztő hitelkonstrukció

A hitel lejáratkor esedékes a teljes tőketörlesztés. Az egyes időperiódusokban csak kamatot fizet az adós, az utolsó kivételével, amikor a tőké is visszafizeti. A fizetett kamat minden periódusban azonos.

Példa: Írja fel annak a hitelkonstrukciónak a pénzáramlását, amelynek futamideje 5 év, kamatlába évente egyszeri kamatfizetés mellett évi 12%. A felvett hitel összege 1 000 000 Ft, a tőke visszafizetése lejáratkor egy összegben esedékes!

Megoldás:

$$K_t = H_t \cdot r = 1\,000\,000 \cdot 0,12 = 120\,000 \text{ Ft } (t = 1 \dots 5)$$

46

Hiteltörlesztési terv

Évek (t)	Hitel- állomány (H_t)	Kamat- fizetés (K_t)	Tőke- törlesztés (T_t)	Törlesztő- részlet ($C_t = K_t + T_t$)
1.	1 000 000	120 000	0	120 000
2.	1 000 000	120 000	0	120 000
3.	1 000 000	120 000	0	120 000
4.	1 000 000	120 000	0	120 000
5.	1 000 000	120 000	1 000 000	1 120 000

47

b) Egyenletes tőketörlesztésű hitelkonstrukció

Az adósság törlesztése állandó nagyságú tőketörlesztő részletekben történik, így a fennálló hitelállomány a futamidő alatt minden periódusban azonos összeggel csökken. A kamatfizetési kötelezettség – a hitelállomány csökkenése okán – a futamidő alatt lineárisan csökken.

Példa: Írja fel annak a hitelkonstrukciónak a pénzáramlását, amelynek futamideje 5 év, kamatlába évente egyszeri kamatfizetés mellett évi 12%. A felvett hitel összege 1 000 000 Ft, a tőke visszafizetésére a futamidő alatt azonos részletekben kerül sor!

Megoldás:

$$T_t = H / t = 1\,000\,000 / 5 = 200\,000 \text{ Ft } (t = 1 \dots 5)$$

48

Hiteltörlesztési terv

Évek (t)	Hitel-állomány (H _t)	Kamat-fizetés (K _t)	Tőke-törlesztés (T _t)	Törlesztő-részlet (C _t =K _t +T _t)
1.	1 000 000	120 000	200 000	320 000
2.	800 000	96 000	200 000	296 000
3.	600 000	72 000	200 000	272 000
4.	400 000	48 000	200 000	248 000
5.	200 000	24 000	200 000	224 000

$$H_2 = H_1 - T_1 = 1\,000\,000 - 200\,000 = 800\,000$$

$$H_3 = H_2 - T_2 = 800\,000 - 200\,000 = 600\,000$$

$$K_1 = H_1 \cdot r = 1\,000\,000 \cdot 0,12 = 120\,000$$

$$K_2 = H_2 \cdot r = 800\,000 \cdot 0,12 = 96\,000$$

49

c) Türelmi idő törlesztés

A türelmi idő alatt az adós a bank felé csak a kamatot fizeti, így a tőketartozása nem változik. A türelmi idő után tehát ugyanannyi a hitelállomány, mint kezdetben.

Példa: Írja fel annak a hitelkonstrukciónak a pénzáramlását, amelynek futamideje 5 év, kamatlába évente egyszeri kamatfizetés mellett évi 12%. A felvett hitel összege 1 000 000 Ft, a tőke visszafizetésére a futamidő alatt azonos részletekben kerül sor **3 év türelmi idő** után!

Megoldás:

$$T_t = H / t = 1\,000\,000 / 2 = 500\,000 \text{ Ft (t = 4, 5)}$$

50

Hiteltörlesztési terv

Évek (t)	Hitel-állomány (H _t)	Kamat-fizetés (K _t)	Tőke-törlesztés (T _t)	Törlesztő-részlet (C _t =K _t +T _t)
1.	1 000 000	120 000	0	120 000
2.	1 000 000	120 000	0	120 000
3.	1 000 000	120 000	0	120 000
4.	1 000 000	120 000	500 000	620 000
5.	500 000	60 000	500 000	560 000

$$H_5 = H_4 - T_4 = 1\,000\,000 - 500\,000 = 500\,000$$

$$K_{1...4} = H_{1...4} \cdot r = 1\,000\,000 \cdot 0,12 = 120\,000$$

$$K_5 = H_5 \cdot r = 500\,000 \cdot 0,12 = 60\,000$$

51

d) Azonos részletfizetésű (annuitásos) hitelkonstrukció:

A periódusok adósságszolgálati (tőketörlesztési + hitelkamat-fizetési) részletei egyenlő nagyságúak (átalány) és a hitel lejáratáig változatlanok maradnak. A adósságszolgálaton belül a kamat és a tőketörlesztés aránya részletenként eltérő. (A futamidő elején magasabb a kamathányad.) Az adósság átalány összege az annuitás értékével azonos.

$$H_1 = C_t \cdot PVIFA_{r,t} \rightarrow C_t = H_1 / PVIFA_{r,t}$$

Példa: Írja fel annak a hitelkonstrukciónak a pénzáramlását, amelynek futamideje 5 év, kamatlába évente egyszeri kamatfizetés mellett évi 12%. A felvett hitel 1 000 000 Ft összegű, az **adósság** (C_t) visszafizetésére a futamidő alatt **átalány** **összeben** kerül sor!

Megoldás: $PVIFA_{12,5} = 3,60478$

$$C_t = H_1 / PVIFA_{12,5} = 1\,000\,000 / 3,60478 = 277\,409 \text{ Ft}$$

52

Hiteltörlesztési terv

Évek (t)	Hitel-állomány (H _t)	Kamat-fizetés (K _t)	Tőke-törlesztés (T _t)	Törlesztő-részlet (C _t =K _t +T _t)
1.	1 000 000	120 000	157 409	277 409
2.	842 591	101 111	176 298	277 409
3.	666 293	79 955	197 454	277 409
4.	468 839	56 261	221 148	277 409
5.	221 148	26 538	294 810	277 409

$$H_2 = H_1 - T_1 = 1\,000\,000 - 157\,409 = 842\,591$$

$$K_2 = H_2 \cdot r = 842\,591 \cdot 0,12 = 101\,111$$

$$T_2 = C_2 - K_2 = 277\,409 - 101\,111 = 176\,298$$

$$H_3 = H_2 - T_2 = 842\,591 - 176\,298 = 666\,293$$

$$K_3 = H_3 \cdot r = 666\,293 \cdot 0,12 = 79\,955$$

$$T_3 = C_3 - K_3 = 277\,409 - 79\,955 = 197\,454 \dots \text{ stb.}$$

53



KÖSZÖNÖM
A MEGTISZTELŐ FIGYELMET!

54